シュレーディンガー方程式における特異性

著者	伊藤 健一
発行年	2013
その他のタイトル	Singularities of the Schrodinger equation
URL	http://hdl.handle.net/2241/121055

様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年　５月２８日現在

機関番号：12102
研究種目：若手研究 (B)
研究期間：2009～2012
課題番号：21740090
研究課題名（和文）　シュレーディンガー方程式における特異性

研究課題名（英文）　Singularities of the Schrödinger equation

研究代表者
伊藤　健一（ITO KENICHI）
筑波大学・数理物質系・講師
研究者番号：90512509

研究成果の概要（和文）：エンドを持つ非コンパクト多様体上のシュレーディンガー作用素に対して，特異性の伝播およびスペクトル・散乱理論を論じ，これまでのユークリッド空間上での結果を多様体上に拡張するとともに，それらの議論に必要な幾何構造を研究した．特に，エンドの存在とその体積の増大度はそれぞれ非有界凸関数の存在とその凸性の強さに言い換えられることが分かり，シュレーディンガー作用素の理論における手法が適用できるようなモデル多様体を座標によらない幾何的な方法で定式化することができた．

研究成果の概要（英文）：I discussed the propagation of singularities and the spectral and scattering theory for the Schrödinger operator on a noncompact manifold with ends. I extended results on the Euclidean space to those manifolds and studied what geometric structure is essentially needed for such analysis. I found that the existence of an end and its volume growth rate can be rephrased in terms of the existence of an unbounded convex function and its strength of convexity, respectively, and formulated geometrically, without coordinates, one model manifold on which methods of the Schrödinger operator theory applies.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	900,000	270,000	1,170,000
2010 年度	700,000	210,000	910,000
2011 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2012 年度	700,000	210,000	910,000
総　計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：関数方程式

１．研究開始当初の背景

Schrödinger 方程式に対する特異性の研究は 1990 年代中ごろから始まった比較的新しい研究である．波動方程式において特異性が有限伝播速度を持つことはよく知られているが，Schrödinger 方程式における特異性は無限大伝播速度を持つため，その解析には超局所解析に対する一段深い理解が必要であった．このことが研究が最近まで進まなかったことの一因と言えるだろう．Schrödinger 方程式における特異性の伝播は，伝播速度は異なるものの，波動方程式と同様，倍特性曲線に沿って起こるため，その後の進展は変数係数の，あるいはより一般に，多様体上の作用素に関するものとなるのが自然である．

波動方程式の初期境界値問題に対する特

異性の伝播の研究で著名なものの一つに Melrose-Sjöstrand の結果がある．そこでは境界における特異性を捉えるためのある擬微分作用素のクラスが用いられるのであるが，その考え方を応用して，Melrose は空間無限遠方をある一様な構造を持つ境界とみなすことで，非コンパクト多様体の一クラスで超局所解析や散乱理論などの解析を論じることのできる標準的なものを提唱した．この多様体は，簡単に言えば，エンドを持つ非コンパクトな多様体であり，エンド上の Riemann 計量が無限遠方である意味で Euclid 計量に近付くようなものである．

Hassell-Wunsch はこの Melrose の考案した多様体上で Schrödinger 方程式に対する特異性の伝播を論じ，精密な結果を得た．特異性が倍特性曲線に沿って速度無限大で伝播することから，Schrödinger 方程式に対する特異性の伝播を多様体上で論じるには無限遠方での幾何構造を必然的に考慮しなければならない．そこから散乱理論を議論する必要が自然に生じ，結果，超局所解析と散乱理論を同時に論じることのできるような対象の上で特異性の伝播を扱うことになるのである．Hassell-Wunsch の理論は非常に優れたもので，多様体上での Schrödinger 方程式に対する特異性の解析を精密に行うことができるものであったが，それを記述する言葉は Melrose の設定に従った難解なもので，必ずしも分かり易いものではなかった．

２．研究の目的

本研究の目的は，多様体上の Schrödinger 方程式に対する特異性の伝播を中心的題材として，解析の手法を展開することのできるような非コンパクト多様体の新たな標準的クラスを研究することである．そして，それを通じて，既存の解析的手法に幾何的簡潔さを，幾何には新しい解析的枠組みを提供することを理念上の目標としている．

Euclid 空間上の Schrödinger 作用素に対しては，前項で触れた特異性の研究の他にも，1990 年代くらいまでに多くの手法が開発され，その理論は，典型的な摂動に対しては，既に完成の域にあると言える．このことからその後は応用研究が盛んにおこなわれることとなり，理論の多様体上への拡張はその流れの一つと捉えることができるだろう．Euclid 空間上で開発された多くの手法は巧妙であり精密な結果を与える．そしてそのような手法の基となるアイデア自身は大抵 Euclid 空間以外でも通用する本質を備えている．ところが，それらのイアデアは，実装する段になって暗に Euclid 空間の幾何構造に依存する形で理論に組み込まれることも多く，それが理論を多様体上に拡張する際の障害となる．上述の Melrose の理論設定も，その哲学，そしてそこから従う結果ともに優れたものであることに疑いは無いが，幾何的観点から見れば本来不要であるような余計な仮定が散見される．非コンパクト多様体上の作用素の研究は，コンパクト多様体上のものに比べると，解析的にも幾何的にも理解が不十分であり，新たな幾何解析の土壌となり得る豊潤な領域である．Euclid 空間上で培われた高度な解析の理論を幾何的に無理のない形で多様体上に翻訳し，そしてそれが適用できる幾何的条件の限界を探ることは，単なる理論の言い換えを超えた新たな一般的手法の開発につながるだろう．

３．研究の方法

前項の目的を実現するため，本研究では，Euclid 空間上でのいくつかの既存の解析的手法からその中に埋め込まれた幾何的本質を抜き出し，そしてそれが適用できる幾何的限界を調べる．題材とする既存の理論としては，より具体的には，特異性の伝播および，それに加えて，スペクトル・散乱理論を考える．Schrödinger 方程式の特異性は無限大伝播速度をもつことから，また散乱理論は時間無限大での状態を扱うことから，これらの題材では必然的に空間無限遠方を考える必要性が生じる．結果非コンパクト多様体においては何らかの意味で遠方での幾何構造を制御することになる．特に，スペクトル・散乱理論において重要な手法である Mourre の方法は伸長作用素の生成作用素という幾何的な作用素が鍵であり，その幾何的適用限界を調べることは今後の非コンパクト多様体に対するスペクトル幾何の発展において重要な意味を持つだろう．

４．研究成果

(1) 特異性の伝播

①漸近的 Euclid 型多様体上での特異性伝播

遠方で漸近的に Euclid 型となるようなエンドを持つ非コンパクト多様体上で Schrödinger 方程式を考え，その解の各時間における波面集合を初期状態に関する情報によって特徴付けた．一般に，関数の空間各点における特異性は，その点における関数の高周波数成分の量により特徴付けられるが，波面集合はその高周波数成分にさらに向き毎の区別を添加したもので，特異性の概念の精密化となっている．量子力学において周波数は運動量に対応するため，ある時間における波面集合は，高運動量成分として，次の瞬間には対応する古典系の軌道に従って無限遠方に飛び去ってしまう．これにより，ある時間における波面集合は次の瞬間には遠方での関数の増大度に変換され，双曲型方程式のように有限速度では伝播しない．しかしこの遠方での増大度に変換されてしまった情

報は自由系を用いて引き戻すことができる．これを利用して，波面集合の特徴付けを得ることができた．引き戻しには動径方向への 1 次元自由 Schrödinger 時間推進作用素を用いる．本結果は Hassell-Wunsch による先行結果の類似物であるが，仮定や手法はより一般化・簡略化されている．証明は Egorov 型定理を用いる．

②時間推進作用素の超局所構造

Euclid 空間上の変数係数 Schrödinger 作用素に対して，対応する時間推進作用素が自由時間推進作用素と Fourier 積分作用素の積であることを示した．この Fourier 積分作用素は対応する古典波動作用素を正準関係に持つものである．本結果における仮定は，係数から定まる Riemann 計量が非捕捉的であることおよび高エネルギー極限において摂動系の古典軌道が自由系からの短距離型摂動となることである．ポテンシャルについては，劣線形増大までのポテンシャルを考える．また，もしポテンシャルに対して空間遠方での通常の意味での短距離型減衰を仮定すると，波動作用素が存在し，それが Fourier 積分作用素となることも示した． この結果は Hassell-Wunsch による先行研究の類似であるが，定式化および証明は大きく異なっており，また一般化・簡略化されている．証明は Egorov 型定理と Fourier 積分作用素の Beals 型特徴付けを用いる．

(2) 散乱理論

①1 次元自由 Schrödinger 作用素との比較

漸近的 Euclid 型多様体上の Schrödinger 作用素に対して，時間に依存する散乱理論を論じ，波動作用素の存在と完全性を示した．また，このような時間に依存する散乱理論が，Melrose らなどによる，一般固有関数の漸近展開から得られる時間に依らない散乱理論の定式化と同値であることも示した．本結果においては，Schrödinger 作用素と比較するための自由系として，動径方向の 1 次元 Laplace 作用素を用いる点が特徴的であり，これは通常の Euclid 空間上での散乱理論と比べて異なったものとなっている．多様体上の場合，自由 Schrödinger 作用素自体がすでに複雑な形をしていることから，摂動系と比較するべき単純な自由系としてこのような動径方向の 1 次元 Laplace 作用素を用いることは適切であると言える．

②より一般のエンドへの拡張

漸近的Euclid型より一般の体積増大度を持つエンドに対して散乱理論を論じ，波動作用素の存在と完全性を示した．具体的には，エンド内での距離関数に対する測地球面の第2基本形式が上下からRiemann計量の定数倍で評価されるような多様体を考える．これによりエンドの増大度を，座標によらない完全に幾何的な条件で定式化することができた．この定式化は前項の漸近的Euclid型多様体よりも広いクラスの多様体を含み，更に，エンドに許される増大度は最良にまで広げられている．用いる自由系は測地的伸長作用素にHamilton-Jacobi方程式の解による位相の修正を加えたものである．証明はMourreの方法とHelffer-Sjöstrandの公式を利用したもので，アイデアは超局所解析的であるが，擬微分作用素の理論は用いていない．この結果と次の項で述べる結果は，前項までの結果と異なり，仮定が完全に座標に依存しないという意味で幾何的であり本研究の研究目的の一部を体現している．多様体上での解析を進めていく上で今後の基礎付けを与える重要な結果と考えられる．

(3) 埋め込まれた固有値の非存在

増大するエンドを持つ多様体上では埋め込まれた固有値が存在しないことを示した．上の項目で述べた多様体のモデルに比べて，条件を更に自然な形に書き下すことに成功し，漸近的Euclid空間および漸近的双曲空間のそれぞれにおける他研究者らによる先行研究を統合・拡張しながら，証明も簡略化することができた．これまでの先行研究ではエンドの存在とその上でのRiemann計量の形状を予め仮定して，議論が進めることが多かったが，本結果ではそれらを「適当な条件を満たす関数の存在」で置き換えた．これにより本来不要であった仮定が省かれ，幾何学的な本質がよりシャープに浮き出る形となった．仮定のうちで最も本質的な部分は多様体遠方における非有界凸関数の存在である．非有界凸関数の存在がエンドの存在と増大を保証し，そこにあらわれる体積増大率をポテンシャル項と同様に扱うことで，漸近的Euclid空間と漸近的双曲空間を統一的に扱うことに成功した．一意接続性定理によりエンドの遠方のみを考えれば十分であり，多様体のその他の部分にはほとんど仮定が無いことも特徴の一つである．証明はFroese-HerbstのEuclid空間上での結果を拡張・簡略化することでなされ，Mourreの方法が鍵となる．前項の結果同様，今後の多様体上での解析をある意味で基礎付ける重要な結果と考えている．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 6 件）

① K. Ito, E. Skibsted, Scattering theory for Riemannian Laplacians, Journal of

Functional Analysis, 264 (2013), 1929-1974, 査読有.
DOI:10.1016/j.jfa.2013.02.002.
http://hdl.handle.net/2241/119198

② K. Ito, S. Nakamura, Remarks on the Fundamental Solution to Schrödinger Equation with Variable Coefficients, Ann. Inst. Fourier, 62 (2012), 1091-1121, 査読有.

③ K. Ito, S. Nakamura, Time-dependent scattering theory for Schrödinger operators on scattering manifolds, J. Lond. Math. Soc. 81 (2010) 774-792, 査読有.

④ K. Ito, S. Nakamura, Schrödinger equations on scattering manifolds and microlocal singularities, Spectral and Scattering Theory and Related Topics, RIMS Kôkyûroku Bessatsu B16 (2010), 91-100, 査読有.

⑤ T. Akahori, K. Ito, Multilinear eigenfunction estimates for the harmonic oscillator and the nonlinear Schrödinger equation with the harmonic potential, Ann. Henri Poincaré 10 (2009), 673-709, 査読有.

⑥ K. Ito, S. Nakamura, Singularities of solutions to the Schrödinger equation on scattering manifold, Amer. J. Math. 131 (2009), 1835-1865, 査読有.

〔学会発表〕(計 17 件)

① K. Ito, Absence of embedded eigenvalues for the Schrödinger operator on manifold with ends, 筑波大学研究集会「リーマン幾何と幾何解析」, 筑波大学, 2013 年 2 月 22 日.

② K. Ito, Absence of embedded eigenvalues for the Schrödinger operator on manifold with ends, Hamiltonians in Magnetic Fields, Institut Mittag-Leffler, Sweden, 2012 年 10 月 25 日.

③ K. Ito, Absence of embedded eigenvalues for the Schrödinger operator on manifold with ends, Young Researcher Symposium, Aalborg, Denmark, 2012 年 8 月 3 日.

④ K. Ito, Absence of embedded eigenvalues for the Schrödinger operator on manifold with ends, PDE セミナー, 北海道大学, 2012 年 7 月 9 日.

⑤ K. Ito, Absence of embedded eigenvalues for the Schrödinger operator on manifold with ends, 東京大学火曜解析セミナー, 東京大学, 2012 年 6 月 26 日.

⑥ K. Ito, Absence of embedded eigenvalues for the Schrödinger operator on manifold with ends, 筑波大学微分幾何セミナー, 筑波大学, 2012 年 6 月 5 日.

⑦ K. Ito, Absence of embedded eigenvalues for the Schrödinger operator on manifold with ends, RIMS 短期共同研究「非線形分散型方程式における最近の進展」, 京都大学, 2012 年 5 月 22 日.

⑧ K. Ito, Absence of embedded eigenvalues for the Schrödinger operator on manifold with ends, スペクトル・散乱あきう(秋保)シンポジウム, 仙台, 2012 年 1 月 9 日.

⑨ K. Ito, Absence of embedded eigenvalues for the Schrödinger operator on manifold, RIMS 研究集会「スペクトル理論とその周辺(Spectral and Scattering Theory and Related Topics)」, 京都大学, 2011 年 12 月 16 日.

⑩ K. Ito, Spectral and scattering theory on manifolds with ends, The 4th MSJ-SI "Nonlinear Dynamics in Partial Differential Equations", 九州大学, 2011 年 9 月 19 日.

⑪ K. Ito, Absence of embedded eigenvalues for Riemannian Laplacians, Aalborg University, Denmark, 2011 年 8 月 3 日.

⑫ K. Ito, Scattering theory from a geometric view point, RIMS 研究集会「幾何学的偏微分方程式における保存則と正則性特異性の研究」, 京都大学, 2011 年 6 月 8 日.

⑬ K. Ito, Scattering theory from a geometric view point, 作用素論セミナー, 京都大学, 2011 年 5 月 27 日.

⑭ K. Ito, Scattering theory from a geometric view point, RIMS 研究集会「スペクトル・散乱理論とその周辺」, 京都大学, 2011 年 2 月 18 日.

⑮ K. Ito, Scattering theory from a geometric view point, 研究集会 第 21 回「数理物理と微分方程式」, 伊豆, 2010 年 11 月 7 日.

⑯ K. Ito, Scattering theory from a geometric view point, Mini Workshop on Linear Partial Differential Operators, 東京大学, 2010 年 10 月 26 日.

⑰ K. Ito, Propagation and diffraction of singularities, and asymptotic behavior of geodesics, 筑波大学微分幾何学火曜セミナー, 筑波大学, 2009 年 6 月 16 日.

６．研究組織

(1)研究代表者

伊藤　健一 (ITO KENICHI)
筑波大学・数理物質系・講師
研究者番号：90512509